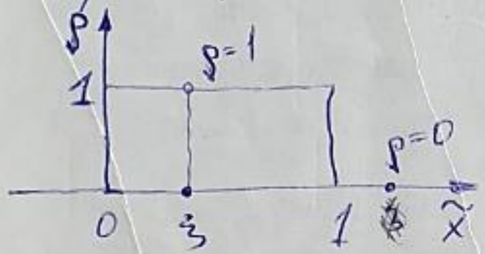
Вычисление определенного интеграла:
статистические формулы

Метод Монте-Карло

Необходимо найти $I=\int_a^b f(x)\,dx$. Перейдём к безразмерному единичному отрезку интегрирования: введём $\tilde{x}=\dfrac{x-a}{b-a}$ $\Rightarrow \tilde{x}\in[0,1]$, получаем и $\tilde{f}=f(\tilde{x})$. Имеем

$$I=\int_0^1 \tilde{f}\,d\tilde{x}\ -\ ?$$

Теперь привлечём генератор случайных чисел $\xi\in[0,1]$ с равномерной плотностью распределения $\rho_\xi(\tilde{x})$



Вероятность попадания случ. величины ξ в точку $\tilde{x}$ — это:

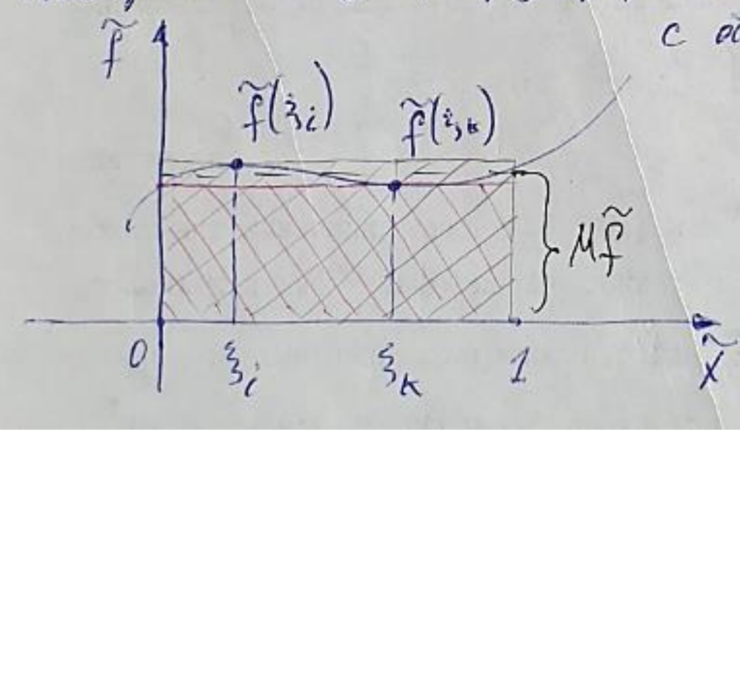
$$P_\xi(\tilde{x})=\int_0^{\tilde{x}}\rho_\xi(z)\,dz$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_\xi\,d\tilde{x}=1$$ — усл. нормировки

$$\rho_\xi(\tilde{x})=\begin{cases}1 & \cancel{0\le\tilde{x}\le 1},\ \tilde{x}\in[0,1],\\ 0 & \tilde{x}\notin[0,1].\end{cases}$$

Очевидно: $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}\rho_\xi\,d\tilde{x}=$ с др. стороны — это мат. ожидание, т.е. среднеарифм. $=M\tilde{f}\approx\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{f}(\xi_i)$

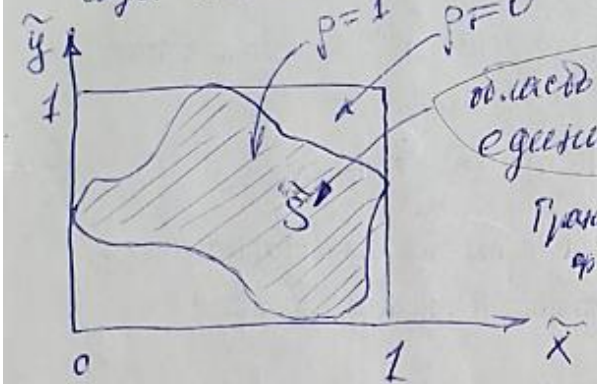
Геометр. смысл — I — это среднеарифм. площадь прямоугольников с общей единичной ~~стороной~~ основанием (безразмерной)



Метод Монте-Карло особенно эффективен для вычисления многократных интегралов:

$$I=\iint\limits_S f\,dx\,dy = \int_0^1\!\!\int_0^1 \tilde f\, d\tilde x\, d\tilde y \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tilde f(\xi_i,\zeta_i),$$

где ξ, ζ - независимые равном. распред. на $[0, 1]$ случ. числа.



область интегрирования, ограниченная единичным квадратом.

Границы интегрир. просто учитываются ф-ией распред. ρ.

Преимущества метода М-К:

1. С увеличением точности интегрирования ε (уменьш. ε) число вычислений f растёт гораздо меньше чем при использовании квадратурных формул.
2. Погрешность вычислений не зависит от гладкости f.
3. Лёгкость интегрир. при сложных границах.

Недостатки:

1. Вероятностный характер результата, т.е. $\nexists$ оценки погрешности при $n \to \infty$.
2. На практике используются генераторы псевдослучайных (не точно случайных с единичной плотностью распред.) чисел.